La logica per strutture metriche ed il numero di gruppi sofici e iperlineari universali

Martino Lupini

York University
Toronto, Canada

27 Giugno, 2012

Table of Contents

Table of Contents

Logica per strutture metriche

La logica per strutture metriche è una modificazione o, meglio, una **generalizzazione** della usuale logica del primo ordine.

Essa è volta allo studio di strutture naturalmente dotate di una **metrica** (limitata e completa).

Esempi di tali strutture sono:

- spazi di probabilità;
- gruppi metrici;
- sfere unitarie di spazi di Banach o C*-algebre.

Linguaggi e strutture

Un linguaggio (metrico) $\mathcal{L}$ è il dato di

- un insieme di **simboli di funzione**;
- l'**arietà** $n_f \in \mathbb{N}$ di ogni simbolo di funzione f;
- un **modulo di continuità** $\omega_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ per ogni simbolo di funzione f.

Una $\mathcal{L}$-struttura (metrica) $\mathcal{S}$ è data da

- uno **spazio metrico** S con metrica completa a valori in $[0, 1]$, detto **supporto** di $\mathcal{S}$;
- per ogni simbolo di funzione f, una funzione

$$f^{\mathcal{S}} : S^{n_f} \to S$$

uniformemente continua con modulo ω_f in ogni variabile, detta **interpretazione** di f in $\mathcal{S}$.

Alcuni esempi

Example

Se $\mathcal{L}_\varnothing$ è il **linguaggio vuoto**, una $\mathcal{L}_\varnothing$-struttura è uno spazio metrico con metrica completa a valori in $[0, 1]$.

Nel seguito, supporrò che tutti gli spazi metrici siano dotati di una metrica completa a valori in $[0, 1]$.

Example

Se $\mathcal{L}_0$ è il linguaggio con un simbolo binario $\cdot$ avente la funzione identica come modulo di continuità,
una $\mathcal{L}_0$-struttura è uno spazio metrico dotato di una operazione binaria 1-Lipschitz in ogni variabile.

Gruppi metrici bi-invarianti

Se G è un gruppo dotato di una metrica bi-invariante,
traslazioni destre e sinistre sono isometriche e, in particolare, 1-Lipschitz.

Si consideri dunque il linguaggio $\mathcal{L}_{Gr}$ avente come simboli:

- un simbolo di funzione binaria "$\cdot$";
- un simbolo di funzione unaria "$(\quad)^{-1}$";
- un simbolo di funzione zeraria "1"

aventi l'identità come modulo di continuità.

Un gruppo metrico bi-invariante G è una $\mathcal{L}_{Gr}$-struttura.

Strutture discrete come strutture metriche

Una struttura **"discreta"** della usuale logica del primo ordine può essere considerata come una struttura metrica, dotata della **metrica banale** definita da

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per esempio, un gruppo discreto può (e sarà, nel seguito) considerato come un gruppo bi-invariante con metrica banale.

La logica per strutture metriche può essere così vista come una **generalizzazione della usuale logica del primo ordine**.

Termini

Se $\mathcal{L}$ è un linguaggio, gli $\mathcal{L}$-termini sono definiti, come in logica discreta, per ricorsione usando

- **simboli variabile** $x, y, z \ldots$;
- i **simboli di funzione** di $\mathcal{L}$.

L'interpretazione di un $\mathcal{L}$-termine in una struttura è definita come usuale per ricorsione sulla complessità.

Per esempio,

$$\left(x \cdot \left(y \cdot \left(x^{-1} \cdot \left(y^{-1}\right)\right)\right)\right)$$

o, brevemente,

$$xyx^{-1}y^{-1}$$

è un $\mathcal{L}_{Gr}$-termine, la cui interpretazione in un gruppo bi-invariante è **la funzione che associa ad una coppia di elementi il loro commutatore**.

Un simbolo per la metrica

In logica per strutture metriche **non esiste il simbolo extralogico "="**.

Esso è sostituito dal simbolo d, che rappresenta la metrica.

L'interpretazione di d in una struttura $\mathcal{S}$ è la metrica $d^{\mathcal{S}}$ del supporto di $\mathcal{S}$

Formule atomiche

Le $\mathcal{L}$-**formule atomiche** sono della forma

$$d\left(t_1, t_2\right)$$

dove t_1, t_2 sono due $\mathcal{L}$-termini.

L'**interpretazione** di una $\mathcal{L}$-formula in una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{S}$ è definita in modo ovvio, interpretando d come la metrica $d^{\mathcal{S}}$ del supporto di $\mathcal{S}$.

Per esempio

$$\varphi(x, y) \equiv d\left(xyx^{-1}y^{-1}, 1\right)$$

è una $\mathcal{L}_{Gr}$-formula atomica.

L'interpretazione φ^G do φ in G è **la funzione che associa ad una coppia di elementi la distanza del loro commutatore dall'identità**.

Un insieme continuo di valori di verità

Si pensi a $[0, 1]$ come **l'insieme dei possibili valori di verità**, dove

- 0 è "vero"
- 1 è "falso".

La formula $\varphi(x, y)$ esprime il concetto **"x e y commutano"**.

Infatti, $\varphi^G(g, h) = 0$ se e solo se g **e** h **commutano**.

$\varphi^G(g, h)$ è tanto più vicino a 1 quanto g e h son lontani da commutare.

Se G è un **gruppo discreto**, φ^G coincide con l'interpretazione dela formula discreta "$xyx^{-1}y^{-1} = 1$".

Più in generale ogni formula discreta ammetta una **"traduzione"** in formula per strutture metriche.

Formule

Le $\mathcal{L}$-fomule sono definite per ricorsione

- partendo dalle **formule atomiche**;
- usando come **connettivi** le funzioni continue $f : [0,1]^n \to [0,1]$;
- usando come **quantificatori** gli operatori $\sup_x$ e $\inf_x$.

Per esempio,

$$\psi \equiv \sup_x \sup_y d\left(xyx^{-1}y^{-1}, 1\right)$$

è una $\mathcal{L}_{Gr}$-formula.

ψ è la "traduzione" in logica per strutture metriche della formula

$$\forall x \forall y, xyx^{-1}y^{-1} = 1$$

Essa esprime il concetto "G è abeliano".

Tabella: Logica per strutture metriche e logica discreta

	LD	LSM
Connettivi	$\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$	$f : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$
Quantificatori	$\forall x, \exists x$	$\inf_x, \sup_x$
Simbolo extralogico	$=$	d
Valori di verità	$\{0,1\}$	$[0,1]$

Ultraprodotti

Gli **ultraprodotti** sono definiti come in logica discreta, ma identificando due successioni quando la distanza dei loro elementi tende a zero.

Precisamente, si supponga che

- $\mathcal{L}$ sia un **linguaggio**;
- $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una **successione di $\mathcal{L}$-strutture**;
- $\mathcal{U}$ sia un **ultrafiltro** su $\mathbb{N}$.

Si definisca la pseudometrica completa su $\prod_{n\in\mathbb{N}} S_n$

$$d^{\mathcal{U}}\left(\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = \mathcal{U} - \lim_{n\in\mathbb{N}} d^{\mathcal{S}_n}(a_n, b_n)$$

e si denoti lo spazio metrico quoziente associato con $S_{\mathcal{U}}$.
L'ultraprodotto $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ di $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispetto a $\mathcal{U}$ è la $\mathcal{L}$-struttura che ha

- $S_{\mathcal{U}}$ come **supporto**;
- $f^{\mathcal{S}_{\mathcal{U}}}\left(\left[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right) = \left[\left(f^{\mathcal{S}_n}(a_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ come **interpretazione** di f.

Il teorema di Løs

Come nella usuale logica discreta, gli ultraprodotti soddisfano il

Theorem (Łos)

Se $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ è una $\mathcal{L}$-formula, allora

$$\varphi^{\mathcal{S}_\mathcal{U}}\left(\left[\left(a_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}\right], \ldots, \left[\left(a_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]\right) = \mathcal{U} - \lim_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{\mathcal{S}_n}\left(a_n^1, \ldots, a_n^k\right).$$

In particolare, se φ non ha variabili libere,

$$\varphi^{\mathcal{S}_\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \lim_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{\mathcal{S}_n}.$$

Come nel caso discreto, la dimostrazione è per ricorsione sulla complessità della formula.

Table of Contents

Due classi di gruppi discreti

Gruppi sofici e **iperlineari** sono due classi di gruppi (numerabili) discreti intensamente studiati in teoria geometrica dei gruppi.

Numerosi **problemi aperti** e congetture in teoria dei gruppi sono stati **risolti** nel caso dei gruppi sofici o iperlineari.

Molti problemi sono tuttora irrisolti, tra cui: esiste un gruppo che non sia sofico (o iperlineare)?

Sebbene gruppi sofici e iperlineari siano **gruppi discreti**, essi sono **definiti in termini di gruppi metrici**.

Risulta dunque naturale applicare la **logica per strutture metriche** al loro studio.

Due famiglie di gruppi metrici

Si denoti

- con $\mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni su n, dotato della **metrica di Hamming**
$$d(\sigma,\tau)=\frac{1}{n}\left|\{i\in n\mid\sigma(i)\neq\tau(i)\}\right|;$$
- con U_n il gruppo delle matrici unitarie $n\times n$, dotato della **metrica di Hilbert-Shmidt**
$$d(A,B)=\frac{1}{2\sqrt{n}}\left(\sum_{i,j}\left|A_{ij}-B_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
- con G un gruppo numerabile discreto, dotato della **metrica banale**
$$d(g,h)=1\quad\text{se } g\neq h$$

I gruppi sofici

Si interpretino $\mathfrak{S}_n$, U_n e G come strutture nel linguaggio $\mathcal{L}_{Gr}$.

Definition

G si dice sofico se, per ogni $\varepsilon > 0$ e $F \subset G$ finite, esiste, per qualche $n \in \mathbb{N}$, una funzione

$$f : G \to \mathfrak{S}_n$$

che **preserva su F tutti i simboli di funzione e la metrica a meno di** ε.

In formule, ciò vuol dire che, $\forall g, h \in F$,

- $d^{\mathfrak{S}_n}\left(f\left(gh\right), f\left(g\right) f\left(h\right)\right) < \varepsilon$
- $d^{\mathfrak{S}_n}\left(f\left(g^{-1}\right), f\left(g\right)^{-1}\right) < \varepsilon$
- $d^{\mathfrak{S}_n}\left(f\left(1^G\right), 1^{\mathfrak{S}_n}\right) < \varepsilon$
- $\left|d^{\mathfrak{S}_n}\left(f\left(g\right), f\left(h\right)\right) - d^G\left(g, h\right)\right| < \varepsilon$

Breve storia dei gruppi sofici

I gruppi sofici furono introdotti da Gromov nel **1999**.

Da allora essi sono oggetto di intenso studio in teoria dei gruppi.

Numerose congetture sono state dimostrate nel caso dei gruppi sofici.

Alcuni esempi:

Conjecture (Gottschalk)

Se X è un insieme finito discreto e $f : X^G \to X^G$ è una funzione continua iniettiva che commuta con la naturale azione di G, allora f è suriettiva.

Conjecture (Kaplanski)

Se K è un campo, l'agebra gruppo $K(G)$ è direttamente finita, cioè $ab = 1$ implica $ba = 1$.

Una classe molto ampia

La classe dei gruppi include in particolare

- i gruppi abeliani:
- più in generale, i gruppi amenabili (gruppi dotati di una misura finitamente additiva definita su tutti i sottoinsiemi);
- ed anche i gruppi inizialmente subamenabili (ogni cui sottoinsieme finito è isomorfo ad un sottoinsieme di un gruppo amenabile).

Per esempio, i **gruppi liberi** sono sofici (ma non amenabili).
Non è noto se i gruppi iberbolici siano sofici.

Open problem

Esiste un gruppo non sofico?

Si congettura che esista un "monster group" (iperbolico) non sofico.

Gruppi iperlineari

La definizione di gruppo iperlineare è analoga alla definizione di gruppo sofico, dove i gruppi simmetrici con la metrica di Hamming sono rimpiazzati dai **gruppi unitari con la metrica di Hilbert-Schmidt**.

I gruppi iperlineari furono introdotti da Radulescu nel **2000**, in relazione al cosiddetto "Connes embedding problem".

La classe dei gruppi iperlineari **contiene la classe dei gruppi sofici**.

Infatti, la funzione

$$\begin{array}{ccc} S_n & \to & U_n \\ \sigma & \mapsto & A_\sigma \end{array}$$

che associa ad una permutazione la corrispondente matrice di permutazione, è un omomorfismo compatibile con la metrica :

$$d\left(A_\sigma, A_\tau\right)^2 = \frac{1}{2} d\left(\sigma, \tau\right)$$

Table of Contents

Ultraprodotti di gruppi di permutazioni

Se $\mathcal{U}$ è un **ultrafiltro** nonprincipale su $\mathbb{N}$, l'associato ultraprodotto $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ della successione $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un gruppo metrico bi-invariante con

- $\prod_n \mathfrak{S}_n / \sim_{\mathcal{U}}$ come **supporto**, dove

$$(\sigma_n) \sim_{\mathcal{U}} (\tau_n) \quad \text{sse} \quad \mathcal{U} - \lim_{n\in\mathbb{N}} d(\sigma_n, \tau_n)$$

- **moltiplicazione**

$$[(\sigma_n)] \cdot [(\tau_n)] = [(\sigma_n \tau_n)]$$

- **metrica "ultralimite"**

$$d^{\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}}([(\sigma_n)], [(\tau_n)]) = \mathcal{U} - \lim_n d^{\mathfrak{S}_n}(\sigma_n, \tau_n).$$

Gruppi sofici universali

Si ricordi la

Definition

G si dice sofico se, per ogni $\varepsilon > 0$ e $F \subset G$ finite, esiste, per qualche $n \in \mathbb{N}$, una funzione

$$f : G \to \mathfrak{S}_n$$

che **preserva su F tutti i simboli di funzione e la metrica a meno di** ε.

E' facile vedere le seguenti condizioni sono equivalenti (per G numerabile):

- G è **sofico**;
- G è **isometricamente isomorfo** ad un sottogruppo di $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ per ogni $\mathcal{U}$;
- G è **isometricamente isomorfo** ad un sottogr. di $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ per qualche $\mathcal{U}$.

In virtù di ciò, i gruppi $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ sono detti gruppi sofici universali.

Gruppi iperlineari universali

Analogamente, per i gruppi iperlineari:

Definition

G si dice iperlineare se, per ogni $\varepsilon > 0$ e $F \subset G$ finite, esiste, per qualche $n \in \mathbb{N}$, una funzione

$$f : G \to U_n$$

che **preserva su F tutti i simboli di funzione e la metrica a meno di** ε.

E' facile vedere le seguenti condizioni sono equivalenti (per G numerabile):

- G è **iperlineare**;
- G è **isometricamente isomorfo** ad un sottogruppo di $U_{\mathcal{U}}$ per ogni $\mathcal{U}$;
- G è **isometricamente isomorfo** ad un sottogr. di $U_{\mathcal{U}}$ per qualche $\mathcal{U}$.

In virtù di ciò, i gruppi $U_{\mathcal{U}}$ sono detti gruppi iperlineari universali.

Il problema dell'isomorfismo

Question

Sono i gruppi sofici (rispett. iperlineari) tutti isomorfi, algebricamente o come gruppi metrici?

Tali gruppi erano considerati come quozienti di ultraprodotti discreti.

Ciò rendeva difficile applicare tecniche di **teoria dei modelli** al loro studio.

Fu dimostrato con un complesso **argomento algebrico-combinatorio** il:

Theorem (Thomas, 2010)

($\neg CH$) *implica che ci sono* $2^{\mathfrak{c}}$ *gruppi sofici universali a due a due non* **algebraicamente** *isomorfi.*

Nell'articolo, Thomas chiede se lo stesso vale per i gruppi iperlineari.
La dimostrazione di Thomas non sembra adattabile **caso iperlineare**.

La proprieta dell'ordine

Il punto di vista della logica per strutture metriche permette di applicare tecniche di teoria dei modelli, quali la proprietà dell'ordine.

Si assuma nel seguito che

- $\mathcal{L}$ è un **linguaggio**;
- $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una **successione di $\mathcal{L}$-strutture**;
- $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$ è una **formula** in $2k$ variabili libere.

Se $n\in\mathbb{N}$, si definisca la relazione k-aria $\prec_\varphi$ su S_n

$$(a_1,\ldots,a_k)\prec_\varphi(b_1,\ldots,b_k)$$

sse

$$\varphi^{\mathcal{S}_n}(a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_k)=0$$

e

$$\varphi^{\mathcal{S}_n}(b_1,\ldots,b_k,a_1,\ldots,a_k)=1$$

La proprietà dell'ordine

Diciamo che la succession $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha la **proprietà dell'ordine** testimoniata da φ se le strutture $\mathcal{S}_n$ contengono $\prec_\varphi$-catene arbitrariamente lunghe.

Più precisamente, per ogni $l \in \mathbb{N}$ c'è una struttura $\mathcal{S}_n$ che contiene una $\prec_\varphi$-catena di lunghezza l.

L'importanza della proprietà dell'ordine è dovuta al

Theorem (Farah-Shelah, 2009)

Si assuma che $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'ordine: $(\neg CH)$ implica l'esistenza di $2^{\mathfrak{c}}$ ultraprodotti $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ a due a due non isomorfi.

Le successioni $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno la proprietà dell'ordine.

Si supponga $l \in \mathbb{N}$.
Si consideri l'immersione

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{\mathfrak{S}_3 \times \cdots \times \mathfrak{S}_3}^{l \text{ times}} & \to & \mathfrak{S}_{3^l} \\ (\rho_1, \ldots, \rho_l) & \mapsto & \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_l \end{array}$$

data dall'azione di $\overbrace{\mathfrak{S}_3 \times \cdots \times \mathfrak{S}_3}^{l \text{ times}}$ su $\{1, 2, 3\}^l$ fattore per fattore.
Si definisca, per $i, j \in \{1, 2, .., l\}$,

$$\sigma_i = \overbrace{(12) \otimes \cdots \otimes (12)}^{i \text{ times}} \otimes \overbrace{e^{\mathfrak{S}_3} \otimes \cdots \otimes e^{\mathfrak{S}_3}}^{l-i \text{ times}}$$

e

$$\tau_i = \overbrace{e^{\mathfrak{S}_3} \otimes \cdots \otimes e^{\mathfrak{S}_3}}^{j-1 \text{ times}} \otimes (23) \otimes \overbrace{e^{\mathfrak{S}_3} \otimes \cdots \otimes e^{\mathfrak{S}_3}}^{l-j \text{ times}}$$

Si osservi che

- se $i < j$, $[\sigma_i, \tau_j] = e^{\mathfrak{S}_{3^l}}$;
- se $i \geq j$ allora

$$[\sigma_i, \tau_j] = \overbrace{e^{\mathfrak{S}_3} \otimes \cdots \otimes e^{\mathfrak{S}_3}}^{j-1 \text{ times}} \otimes (123) \otimes \overbrace{e^{\mathfrak{S}_3} \otimes \cdots \otimes e^{\mathfrak{S}_3}}^{l-j \text{ times}}$$

è il prodotto di 3^{l-1} 3-cicli disgiunti.

Ciò dimostra che

$$(\sigma_i, \tau_i)_{i=1}^{l}$$

è una $\prec_\varphi$-catena di lunghezza l, dove φ è la formula

$$d\left(xyx^{-1}y^{-1}, 1\right)$$

Dunque, φ testimonia la proprietà dell'ordine della successione $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Anche la successione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'ordine.

La proprietà dell'ordine per la successione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può dedurre dalla proprietà dell'ordine di $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usando l'immersione

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{S}_n & \to & U_n \\ \sigma & \mapsto & A_\sigma \end{array}$$

attraverso matrici di permutazione.

In virtù della relazione

$$d\left(A_\sigma, A_\tau\right) = \sqrt{\frac{d\left(\sigma,\tau\right)}{2}}.$$

questa immersione quasi preserva il valore di formule senza quantificatori.

Non è finita qui...

Questo dimostra che, assumendo $(\neg CH)$, ci sono $2^{\mathfrak{c}}$ gruppi sofici (rispett. iperlineari) universali a 2 a 2 non isomorfi come gruppi metrici.

Più precisamente, tra ogni coppia di essi non c'è alcuna isometria **che preservi le operazioni**.

Questo non implica necessariamente che tra essi non vi sia alcuna bigezione **che preservi le operazioni**.

Per ottenre questo risultato più forte, bisogna analizzare la **dimostrazione del Teorema di Farah e Shelah**.

Si supponga che

- $\mathcal{L}$ è un **linguaggio**;
- $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una **successione di $\mathcal{L}$-strutture** con la proprietà dell'ordine testimoniata da $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$.

Catene skeleton-like

Una $\prec_\varphi$-catena $\mathcal{C}$ in una $\mathcal{L}$-struttura $\mathcal{S}$ è detta **$(\aleph_1, \varphi)$-skeleton-like** se per ogni $\overline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in S^k$ c'è $\mathcal{C}_{\overline{a}} \subset \mathcal{C}$ numerabile tale che, per ogni $\overline{b}, \overline{c} \in \mathcal{C}$, se

$$\left\{ x \in \mathcal{C}_{\overline{a}} \,\middle|\, \overline{b} \prec_\varphi x \prec_\varphi \overline{c} \right\} = \varnothing,$$

allora

$$\varphi^{\mathcal{S}}\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \varphi^{\mathcal{S}}\left(\overline{a}, \overline{c}\right) \quad \text{and} \quad \varphi^{\mathcal{S}}\left(\overline{b}, \overline{a}\right) = \varphi^{\mathcal{S}}\left(\overline{c}, \overline{a}\right).$$

Lemma (1)

Se I è un ordine lineare di cardinalità $\mathfrak{c}$, c'è un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ contiene una $\prec_\varphi$-catena $(\aleph_1, \varphi)$-skeleton-like di tipo d'ordine I.

Il lemma è ottenuto dimostrando che la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ che $\mathcal{U}$ deve contenere per soddisfare la tesi ha la p.i.f.

Strutture non-isomorfe

Lemma (2)

Si supponga che $\lambda \geq \aleph_2$ sia un cardinale. Se **K** *è una classe di $\mathcal{L}$-strutture di densità caratteristica λ tale che, per ogni ordine lineare I di cardinalità λ, c'è una struttura $\mathcal{S}$ in* **K** *che contiene una $\prec_\varphi$-catena $(\aleph_1, \varphi)$-skeleton like, allora* **K** *contiene 2^λ strutture a 2 a 2 non isomorfe.*

Nella dimostrazione, si associano invarianti a **ordini lineari** *I* di cardinalità λ e ad $\mathcal{L}$-**strutture** di densità caratteristica λ, in modo che

- il numero di invarianti associati ad ordini lineari è 2^λ;
- ad ogni struttura sono associati al più λ invarianti;
- se una struttura $\mathcal{S}$ contiene una $\prec_\varphi$-catena $(\aleph_1, \varphi)$-skeleton-like $\mathcal{C}$, allora l'insieme degli invarianti associati ad $\mathcal{S}$ contiene l'insieme degli invarianti associati a $\mathcal{C}$.

La conclusione segue per il principio dei cassetti (infinito).

$2^{\mathfrak{c}}$ gruppi sofici universali

Sia φ è la formula che testimonia la **proprietà dell'ordine** della successione $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la **metrica di Hamming**.

Si applichi il **Lemma 1** alla successione $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si ottiene così, per ogni ordine lineare I di cardinalità $\mathfrak{c}$, un **ultraprodotto** $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ dotato della **metrica ultralimite** che contiene una catena $(\aleph_1, \varphi)$-skeleton-like $\mathcal{C}$ di tipo d'ordine I.

Si osservi ora che $\mathcal{C}$ rimane una catena $(\aleph_1, \varphi)$-skeleton-like qualora si rimpiazzi la metrica ultralimite con la metrica banale.

Se $\mathfrak{c} \geq \aleph_2$, applicando il **Lemma 2** alla classe di ultraprodotti $\mathfrak{S}_{\mathcal{U}}$ dotati della metrica banale, si deduce l'esistenza di $2^{\mathfrak{c}}$ gruppi sofici universali a 2 a 2 non algebricamente isomorfi.

$2^{\mathfrak{c}}$ gruppi iperlineari universali

Raginando analogamente nel caso di $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si ottengono, se $\mathfrak{c} \geq \aleph_2$, $2^{\mathfrak{c}}$ gruppi iperlineari universali a 2 a 2 non algebricamente isomorfi.

Più in generale, si ottiene il

Lemma

Sia $\mathcal{L}$ un **linguaggio** *e φ una $\mathcal{L}$-***formula** *della forma*

$$q\left(d\left(t, s\right)\right)$$

dove q è una **funzione continua** *tale che $q(x) = 0$ sse $x = 0$.*

Se $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di $\mathcal{L}$-strutture con la proprietà dell'ordine testimoniata da φ, allora assumendo $(\neg CH)$ esistono $2^{\mathfrak{c}}$ ultraprodotti $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ tra i quali non esiste alcuna bigezione che preservi i simboli di funzione.